Devoir Maison 4

Pour le 1 décembre 2025

Problème Étude des torseurs

(*d'après Centrale TSI 2017*)

Les torseurs sont des outils mathématiques utilisés en mécanique du solide indéformable.

On considère un solide indéformable Σ. Si A est un point de ce solide et si $\overrightarrow{V}(A)_{\mathcal{R}}$ désigne la vitesse du point $A \in \Sigma$ dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$, il est bien connu que, pour tous points A et B de Σ, on a

$$\overrightarrow{V}(B)_{\mathcal{R}} = \overrightarrow{V}(A)_{\mathcal{R}} + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{\Omega}_{\Sigma/\mathcal{R}}$$

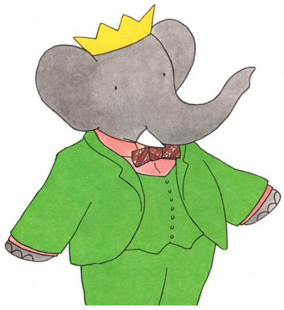
où $\overrightarrow{\Omega}_{\Sigma/\mathcal{R}}$ est un vecteur appelé *vecteur vitesse instantanée de rotation* du solide Σ par rapport au référentiel $\mathcal{R}$.

L'application $A \mapsto \overrightarrow{V}(A)_{\mathcal{R}}$ est alors liée au *torseur cinématique.*

Cette partie se propose de dégager la théorie liée aux torseurs.

Notations :

- $\mathcal{E}$ désigne l'ensemble des points de l'espace géométrique orienté usuel de dimension 3 et on considère O un point fixé de $\mathcal{E}$.
- On note $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ l'ensemble des vecteurs de $\mathcal{E}$ et on considère $\mathcal{B} = (\overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ une base orthonormée directe de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
- Le produit scalaire de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est noté $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle$.
- Le produit vectoriel de deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$.



On appelle *torseur* toute application $\mathcal{M} : \mathcal{E} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$ pour laquelle il existe un vecteur $\overrightarrow{r}$ tel que

$$\forall (A,B) \in \mathcal{E}^2 \qquad \mathcal{M}(B) = \mathcal{M}(A) + \overrightarrow{BA} \wedge \overrightarrow{r}$$

Partie I — L'espace $\mathcal{T}$ des torseurs

1. Soit $\overrightarrow{r}$ un vecteur de $\overrightarrow{\mathcal{E}}$. Montrer que l'application $\mathcal{M} : A \mapsto \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OA}$ est un torseur.
2. Montrer que l'ensemble $\mathcal{T}$ des torseurs est un sous-espace vectoriel du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathcal{E}, \overrightarrow{\mathcal{E}})$ des applications de $\mathcal{E}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$.
3. (a) Soit $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ deux vecteurs de l'espace. Rappeler, sans démonstration, une condition géométrique nécessaire et suffisante pour que $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$.

   (b) Soit $\mathcal{M}$ un torseur. Montrer que le vecteur $\overrightarrow{r}$ de la définition est unique.

   Il s'appelle la *résultante* du torseur $\mathcal{M}$. On admet que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{T} & \to & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ \mathcal{M} & \mapsto & \overrightarrow{r} \end{array}$ est linéaire.
4. (a) Vérifier qu'une application constante de $\mathcal{E}$ dans $\overrightarrow{\mathcal{E}}$ est un torseur et en donner la résultante.

   Un tel torseur s'appelle un *couple.*

   (b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{C}$ des couples est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}$ et que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{C} & \to & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ \mathcal{M} & \mapsto & \mathcal{M}(O) \end{array}$ est un isomorphisme.

   (c) En déduire la dimension de $\mathcal{C}$.
5. On appelle *glisseur* tout torseur qui s'annule en au moins un point de $\mathcal{E}$.

   (a) Soit O_1 un point de $\mathcal{E}$ distinct de O et $\overrightarrow{r}$ un vecteur non nul et non colinéaire à $\overrightarrow{OO_1}$. On note $g_0 : A \mapsto \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{OA}$ et $g_1 : A \mapsto \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{O_1A}$.

   Montrer que g_0 et g_1 sont des glisseurs, mais que $g_0 - g_1$ n'en est pas un. Expliquer pourquoi l'ensemble $\mathcal{G}$ des glisseurs n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}$.

   (b) Montrer que l'ensemble $\mathcal{G}_O$ des glisseurs s'annulant en O est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{T}$ et que l'application $\begin{array}{ccc} \mathcal{G}_O & \to & \overrightarrow{\mathcal{E}} \\ \mathcal{M} & \mapsto & \overrightarrow{r} \end{array}$, où $\overrightarrow{r}$ est la résultante de $\mathcal{M}$, est un isomorphisme.

(c) En déduire la dimension de $\mathcal{G}_O$.
(d) Démontrer que $\mathcal{T} = \mathcal{C} \oplus \mathcal{G}_O$. Quelle est la dimension de $\mathcal{T}$?

Partie II — Équiprojectivité

6. Démontrer que, si $\mathcal{M}$ est un torseur alors $\mathcal{M}$ vérifie la propriété suivante :

$$\forall (A, B) \in \mathcal{E}^2, \qquad \langle \mathcal{M}(A), \overrightarrow{AB} \rangle = \langle \mathcal{M}(B), \overrightarrow{AB} \rangle$$

Cette propriété est connue sous le nom de propriété d'équiprojectivité.

On se propose d'étudier la réciproque.

7. (a) Rappeler la définition d'une matrice antisymétrique.
(b) L'espace est muni du repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{e}_1, \overrightarrow{e}_2, \overrightarrow{e}_3)$ et on identifie tout vecteur avec la matrice colonne 3×1 contenant ses coordonnées dans la base $\mathcal{B}$.

Montrer qu'il existe un unique vecteur $\overrightarrow{r}$, dont on donnera les coordonnées dans la base $\mathcal{B}$, tel que

$$\forall \overrightarrow{u} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}, \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{u}$$

8. Soit $f : \overrightarrow{\mathcal{E}} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$ une application telle que pour tous vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, $\langle f(\overrightarrow{u}), \overrightarrow{v} \rangle = -\langle \overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{v}) \rangle$.
(a) Montrer que f est linéaire.

Pour λ et μ deux nombres réels, on pourra considérer le vecteur $\overrightarrow{w} = f(\lambda \overrightarrow{u} + \mu \overrightarrow{v}) - \lambda f(\overrightarrow{u}) - \mu f(\overrightarrow{v})$ et montrer qu'il est orthogonal à tout vecteur de $\mathcal{E}$.
(b) Montrer que la matrice de f dans la base $\mathcal{B}$ est une matrice antisymétrique.
(c) Démontrer qu'il existe un unique vecteur $\overrightarrow{r} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$ tel que pour tout $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{E}}$, $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{r} \wedge \overrightarrow{u}$.

9. Soit $\mathcal{M} : \mathcal{E} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$ une application vérifiant la propriété d'équiprojectivité. Montrer alors que $\mathcal{M}$ est un torseur.

On pourra considérer l'application $f : \overrightarrow{\mathcal{E}} \to \overrightarrow{\mathcal{E}}$ définie pour tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \overrightarrow{\mathcal{M}}$ par $f(\overrightarrow{u}) = \mathcal{M}(O') - \mathcal{M}(O)$ où O' désigne le translaté du point O par le vecteur $\overrightarrow{u}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{OO'} = \overrightarrow{u}$.